CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 1, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i1.49

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Pewarnaan Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Keluarga Graf Pohon *Tree*

Umi Azizah Anwar[2], Arika Indah Kristiana[2], Arif Fatahillah[2], Dafik[1,2], Ridho Alfarisi [3]
[1]CGANT - University of Jember
[2]Departement of Mathematics Education - University of Jember
[3]Department of Elementary School Teacher Education - University of Jember
azizahu74@gmail.com, arikakristiana@gmail.com, fatahillah76@gmail.com,
d.dafik@unej.ac.id, alfarisi.fkip@unej.ac.id

Abstract

All graph in this paper is a simple and connected graph. We define $l : V(G) \to \{1, 2, 3, ...k\}$ is called vertex irregular k-labeling and $w : (G) \to N$ the weight function with $[\sum_{u \epsilon N} l(u)+ l(v)]$. A local irregularity inclusive coloring if every $u, v \epsilon E(G), w(u) \neq w(v)$ and $max(l) = min\{max(l_i), l_i label function\}$. The chromatic number of local irregularity inclusive coloring of G denoted by χ^i_{lis}, is the minimum cardinality of local irregularity inclusive coloring. We study about the local irregularity inclusive coloring of some family tree graph and we have found the exact value of their chromatic number.

Keywords : Inclusive coloring, tree graphs.
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Graf G merupakan kumpulan dari himpunan *verteks* (V) dan himpunan *edge* (E) dimana V adalah himpunan semua titik-titik yang tak kosong dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan dua buah titik.

Graf pohon adalah graf non-trivial yang paling sederhana. Selain itu, graf pohon memiliki beberapa sifat yang menarik diantaranya yaitu tidak memiliki siklus, dua buah titik dihubungkan oleh tepat satu buah lintasan dan sifat-sifat indah lainnya. Wilson (2010) dalam [1] mengatakan bahwa sebuah graf terhubung yang tidak memiliki siklus adalah sebuah pohon *(tree)*.

Pelabelan merupakan pemetaan bijektif dari himpunan titik atau himpunan sisi ke suatu sub himpunan bilangan asli. Apabila domain dari pemetaan adalah himpunan titik maka disebut dengan pelabelan titik, namun jika domain dari pemetaan adalah himpunan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Adapun pelabelan total jika domainnya merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi. Pada tahun 1988 Chartrand, dkk. memperkenalkan konsep pelabelan ketakteraturan, suatu fungsi $f : E \to \{1, 2, 3, ...k\}$ dikatakan pelabelan ketakteraturan pada suatu graf jika dua titik yang berbeda pada V memiliki bobot yang berbeda, yakni $\sum_{x,y \in E} f(xy) \neq \sum_{uv \in E} f(uv)$ untuk setiap titik x dan u di V dengan $x \neq u$.

Pewarnaan graf adalah pemberian warna yang mungkin pada bagian-bagian yang terdapat pada graf, baik itu pemberian warna pada simpul (V) maupun pemberian warna pada sisi (E). Permasalahan mendasar dalam pewarnaan graf ini adalah menentukan seminimal mungkin warna yang dibutuhkan untuk mewarnai sebarang graf, yang kemudian disebut dengan *chromatic number* atau bilangan kromatik [2].

Sebuah pewarnaan titik proper dari graf G adalah fungsi $c : V(G) \to S$, dimana dalam kasus kita, $S = [k] = 1, 2, \ldots, k$ atau $S = \mathbf{Z}_k$ untuk bilangan bulat $k \geq 2$ sedemikian hingga $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap pasangan u, v titik yang berdekatan dari G [3]. Jadi pewarnaan titik proper adalah pewarnaan dimana titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda.

Pewarnaan ketakteraturan lokal dimulai dari pelabelan ketakteraturan yang tidak sama dengan pelabelan biasa, pelabelan biasa menggunakan bilangan asli yang berurutan dari 1 sampai jumlah titik pada graf dan boleh berulang. Ketakteraturan harus berbeda semuanya sedangkan pewarnaan hanya berbeda dititik yang bertetangga. Jika pewarnaan digabung dengan ketakteraturan sifat yang digugurkan adalah sifat ketakteraturannya. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah gabungan konsep dari pewarnaan titik dan pelabelan ketakteraturan. Kristina, dkk dalam [4] mendefinisikan ketakteraturan lokal, dimisalkan $l : V(G) \to \{1, 2, 3, ...k\}$ merupakan fungsi label dan $w : V(G) \to N$ merupakan fungsi bobot dapat dikatakan pewarnaan ketakteraturan jika pelabelan yang digunakan seminimal mungkin dan untuk setiap $u, v\epsilon E(G)$, $w(u) \neq w(v)$. Kristina, dkk juga menentuka bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang, graf komplit, graf persahabatan, dan graf roda [5,6] dan pada graf buku segitiga, graf *pan*, graf buku persegi, dan graf *grid* [7]

Pewarnaan ketakteraturan lokal inklusif merupakan topik graf yang menggabungkan pelabelan ketakteraturan jarak dan pewarnaan titik pada graf. Pelabelan dan pewarnaan titik yang digunakan harus seminimal mungkin. Pelabelan pada graf didefinisikan oleh $l : V(G) \to \{1, 2, 3, ...k\}$ dimana l merupakan pelabelan titik dan pewarnaan titik dinyatakan dengan $1, 2, 3, ...k$. Pewarnaan ketakteraturan lokal inklusif memiliki kemiripan dengan pewarnaan ketakteraturan hanya saja untuk pewarnaan ketakteraturan lokal inklusif bobot ditambah dengan label dirinya sendiri. Berikut definisi dari pewarnaan ketakteraturan lokal inklusif [8].

Definition 1. *[8] Misalkan $l : V(G) \to 1, 2, 3 \ldots k$ adalah simpul ketakteraturan k-label dan $w : V(G) \to N$ adalah fungsi bobot dengan $[\sum_{u\epsilon N} l(u) + l(v)]$. Dikatakan memenuhi kriteria pewarnaan ketakteraturan lokal inklusif jika:*

$i.$ $opt(l) = \max\{\min\{l_i, l_i label fungsi\}\}$

$ii.$ setiap titik yang bertetangga $uv \in E(G)$ sedemikian hingga $w(u) \neq w(v)$.

Dalam makalah ini, kita akan menggunakan definisi, lemma dan observasi berikut untuk menghitung pewarnaan ketakteratulan lokal inklusif dari suatu graf:

Lemma 1. *[8] Misalkan G adalah graf terhubung dan sederhana, $\chi^i_{lis}(G) \geq \chi_{lis}(G)$.*

Suatu graf G dengan derajat titik yang berbeda memiliki optimal pelabelan $opt(l) = 1$ Suatu graf G dengan dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan $opt(l) \geq 2$ Misalkan graf G adalah graf ilalang dengan $n \geq 2$, maka bilangan kromatik $(S_n, 3)$ adalah 3. Misalkan graf G adalah graf bintang ganda $(S_{m,n})$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka bilangan kromatik ketakteraturan lokal $\chi_l is(S_{m,n}) = 3$ Misalkan graf G adalah graf H-Bintang HS_n dengan $n \geq 2$, maka bilangan kromatik ketakteraturan lokal $\chi_{lis}(HS_n)$ adalah .

$\chi^i_{lis}(HS_n)$= $\begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 2 \\ 5, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$

Hasil Penelitian

Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf ilalang $(S_n, 3)$, untuk $n \geq 2$ adalah 3.

Bukti. Himpunan titik pada graf ilalang $V(S_n, 3) = \{x\} \cup \{y_i : 1 \leq i \leq 3\} \cup \{y^i_1 : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y^i_2 : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y^i_3 : 1 \leq i \leq n\}$. Himpunan sisi pada graf ilalang $E(S_n, 3)$ adalah $\{xy_i, 1 \leq i \leq 3\} \cup \{y_1y^i_1 : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_2y^i_2 : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_3y^i_3 : 1 \leq i \leq n\}$. Terdapat dua kondisi yang berbeda yaitu ketika $n = 2$ dan $n \geq 3$, berikut penjelasannya.

i. Ketika $n = 2$

Berdasarkan observasi 0.2 optimal pelabelan atau $opt(l)$ untuk graf yang titiknya memiliki derajat yang sama adalah $opt(l) \geq 2$. Untuk membuktikan $\chi^i_{lis}(S_n, 3) = 3$, berdasarkan lemma batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf $S_n, 3$ adalah $\chi^i_{lis} \geq \chi_{lis} = 3$. Batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif kita definisikan $l : V(S_n, 3) \to \{1, 2\}$. Berikut pelabelan dari ketakteraturan lokal inklusif pada graf ilalang $(S_n, 3)$

$$\begin{aligned} l(x) &= 1 \\ l(y_1) &= 1,\text{untuk } 1 \leq i \leq 3 \\ l(y^i_1) &= 2,\text{untuk } 1 \leq i \leq 2 \\ l(y^i_2) &= 2,\text{untuk } 1 \leq i \leq 2 \\ l(y^i_3) &= 2,\text{untuk } 1 \leq i \leq 2 \end{aligned}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetagga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w(x) &= 4 \\ w(y_i) &= 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 3 \\ w(y^i_1) &= 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2 \\ w(y^i_2) &= 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2 \\ w(y^i_3) &= 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2 \end{aligned}$$

Dari perhitungan bobot di atas kita mendapatkan $|w(S_n, 3)| = 3$ untuk $n = 2$. Sedemikian hingga $3 = \chi^i_{lis} \geq \chi_{lis} = 3$ sehingga berdasarkan definisi 1 kita dapat menyimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf ilalang $S_n, 3$ untuk $n = 2$ adalah 3 atau $\chi^i_{lis}(S_n, 3) = 3$.

ii. Ketika $n \geq 3$

Berdasarkan observasi 0.1 optimal pelabelan atau $opt(l)$ untuk graf yang setiap titiknya memiliki derajat berbeda adalah 1. Sehingga perhitungan bobot untuk graf $S_n, 3$ sebagai berikut.

$$w(x) = 4$$
$$w(y_i) = n+2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 3$$
$$w(y_1^i) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$
$$w(y_2^i) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$
$$w(y_3^i) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dari perhitungan bobot di atas kita mendapatkan $|w(S_n, 3)| = 3$ untuk $n \geq 3$. Sedemikian hingga $3 = \chi^i_{lis} \geq \chi_{lis} = 3$ sehingga berdasarkan definisi 1 kita dapat menyimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf ilalang $S_n, 3$ untuk $n \geq 2$ adalah 3 atau $\chi^i_{lis}(S_n, 3) = 3$.

Terbukti bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf ilalang $(S_n, 3)$, untuk $n \geq 2$ adalah 3.

Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf H-Bintang HS_n dengan $n \geq 2$ adalah

$$\chi^i_{lis}(HS_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 2 \\ 5, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Himpunan titik pada graf H-Bintang (HS_n) adalah $V(HS_n) = \{a_i, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{b_i, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{c_i, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{a_1^i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{a_2^i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_1^i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_2^i, 1 \leq i \leq n\}$. Himpunan sisi pada graf H-Bintang (HS_n) adalah $E(HS_n) = \{a_1b_1\} \cup \{a_2b_2\} \cup \{b_1b_2\} \cup \{b_1c_1\} \cup \{b_2c_2\} \cup \{a_1a_1^i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{a_2a_2^i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_1c_1^i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_2c_2^i, 1 \leq i \leq n\}$. Terdapat 2 kasus pada bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf H-Bintang (HS_n) yaitu ketika $n = 2$ dan $n \geq 3$. Berikut penjabaran dari kasus tersebut.

Kasus 1. $n = 2$ Berdasarkan observasi 0.2 optimal pelabelan atau $opt(l)$ untuk graf yang titiknya memiliki derajat yang sama adalah $opt(l) \geq 2$. Untuk membuktikan $\chi^i_{lis}(HS_n) = 3$, berdasarkan lemma batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf HS_n adalah $\chi^i_{lis} \geq \chi_{lis} = 4$. Batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif kita definisikan $l : V(S_n, 3) \rightarrow \{1, 2\}$. Berikut pelabelan dari ketakteraturan lokal inklusif pada $H-$Bintang (HS_n).

$$l(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1 \\ 2, & \text{untuk } i = 1 \end{cases}$$
$$l(b_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$
$$l(c_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1 \\ 2, & \text{untuk } i = 2 \end{cases}$$
$$l(a_1^i) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$
$$l(a_2^i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$
$$l(c_1^i) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$
$$l(c_2^i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$w(a_i) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } i = 1 \\ 5, & \text{untuk } i = 2 \end{cases}$$
$$w(b_i) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } i = 1 \\ 6, & \text{untuk } i = 2 \end{cases}$$

$$w(c_i)=\begin{cases}6, & \text{untuk } i=1\\ 5, & \text{untuk } i=2\end{cases}$$

$$w(a_k^i, c_k^i) = 3 \text{ untuk } 1 \leq\ i \leq n, 1 \leq k \leq 2$$

Dari perhitungan bobot di atas kita mendapatkan $|w(HS_n)| = 4$ untuk $n = 2$. Sedemikian hingga $4 = \chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 4$ sehingga berdasarkan definisi 1 kita dapat menyimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif graf H-Bintang (HS_n) adalah 4 untuk $n = 2$ atau $\chi_{lis}^i(HS_n) = 4$ atau $\chi_{lis}^i(HS_n) = 4$.

Kasus 2. $n \geq 3$

Berdasarkan observasi 0.2 optimal pelabelan atau $opt(l)$ untuk graf yang titiknya memiliki derajat yang sama adalah $opt(l) \geq 2$. Untuk membuktikan $\chi_{lis}^i(HS_n) = 5$, berdasarkan lemma batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf HS_n adalah $\chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 5$. Batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif kita definisikan $l : V(S_n, 3) \to \{1, 2\}$. Berikut pelabelan dari ketakteraturan lokal inklusif pada $H-$Bintang (HS_n).

$$l(a_i)=\begin{cases}1, & \text{untuk } i=1\\ 2, & \text{untuk } i=1\end{cases}$$

$$l(b_i) = 1, \text{ untuk } \{1 \leq i \leq 2\}$$

$$l(c_i)=\begin{cases}1, & \text{untuk } i=1\\ 2, & \text{untuk } i=2\end{cases}$$

$$l(a_1^i) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$
$$l(a_2^i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$
$$l(c_1^i) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$
$$l(c_2^i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut. $w(a_i)=\begin{cases}2n+2, & \text{untuk } i=1\\ \text{n+3}, & \text{untuk } i=2\end{cases}$

$$w(b_i)=\begin{cases}4, & \text{untuk } i=1\\ 6, & \text{untuk } i=2\end{cases}$$

$$w(c_i)=\begin{cases}2n+2, & \text{untuk } i=1\\ \text{n+3}, & \text{untuk } i=2\end{cases}$$

$$w(a_k^i, c_k^i) = 3 \text{ untuk } 1 \leq\ i \leq n, 1 \leq k \leq 2$$

Dari perhitungan bobot di atas kita mendapatkan $|w(HS_n)| = 5$ untuk $n \geq 3$. Sedemikian hingga $5 = \chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 5$ sehingga berdasarkan definisi 1 kita dapat menyimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif graf H-Bintang (HS_n) untuk $n \geq 5$ adalah 5 atau $\chi_{lis}^i(HS_n) = 5$ atau $\chi_{lis}^i(HS_n) = 5$.

Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf bintang ganda $(S_{m,n})$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah 3.

Bukti. Himpunan titik pada graf bintang ganda $V(S_{m,n}) = \{x_i : 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_1^i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_2^i : 1 \leq i \leq n\}$. Himpunan sisi pada graf bintang ganda $E(S_{m,n})$ adalah $\{x_1x_2\} \cup \{x_1x_1^i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_2x_2^i : 1 \leq i \leq n\}$. Terdapat dua kasus pada bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf bintang ganda $S_{m,n}$ yaitu ketika $m \neq n$ dan $m = n$. Berikut penjabaran dari kasus tersebut.

Kasus 1. $m \neq n$

Untuk membuktikan $\chi_{lis}^i(S_{m,n}) = 3$, berdasarkan lemma batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf $S_{m,n}$ adalah $\chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 3$. Berdasarkan observasi 0.1 optimal pelabelan atau $opt(l)$ untuk graf yang setiap titiknya memiliki derajat berbeda adalah 1. Sehingga perhitungan bobot untuk graf $S_{m,n}$ sebagai berikut.

$$w(x_1) = 2n + 1$$
$$w(x_2) = n + 1$$
$$w(x_1^i) = 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$
$$w(x_2^i) = 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dari perhitungan bobot di atas kita mendapatkan $|w(S_{m,n})| = 3$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Sedemikian hingga $3 = \chi^i_{lis} \geq \chi_{lis} = 3$ sehingga berdasarkan definisi 2.4.1 kita dapat menyimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf bintang ganda $S_{m,n}$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah 3 atau $\chi^i_{lis}(S_{m,n}) = 3$.

Kasus 2. $m = n$

Untuk membuktikan $\chi^i_{lis}(S_{m,n}) = 3$, berdasarkan lemma batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf $S_{m,n}$ adalah $\chi^i_{lis} \geq \chi_{lis} = 3$. Berdasarkan observasi 0.2 optimal pelabelan atau $opt(l)$ untuk graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama adalah lebih besar atau sama dengan dua atau $opt(l) \geq 2$. Berikut pelabelan dari ketaktertauran lokal inklusif pada graf bintang ganda untuk $n \neq n$.

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 2, & i = 2 \end{cases}$$
$$l(x_1^i) = 2, 1 \leq i \leq n$$
$$l(x_2^i) = 1, 1 \leq i \leq n$$

Sehingga perhitungan bobot untuk graf $S_{m,n}$ sebagai berikut.

$$w(x_1) = 2n + 3$$
$$w(x_2) = n + 3$$
$$w(x_1^i) = 3, 1 \leq i \leq n$$
$$w(x_2^i) = 3, 1 \leq i \leq n$$

Dari perhitungan bobot di atas kita mendapatkan $|w(S_{m,n})| = 3$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Sedemikian hingga $3 = \chi^i_{lis} \geq \chi_{lis} = 3$ sehingga berdasarkan definisi 1 kita dapat menyimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf bintang ganda $S_{m,n}$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah 3 atau $\chi^i_{lis}(S_{m,n}) = 3$.

Kesimpulan

Penelitian ini menemukan bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada keluarga graf pohon *Tree* diantaranya yaitu graf Ilalang $S_n, 3$ untuk $n \geq 2$ adalah 3, graf H-Bintang HS_n yaitu untuk $n = 2$ adalah 4 dan $n \geq 3$ adalah 5, dan yang terakhir yaitu graf bintang ganda $S_{m,n}$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah 3.

Masalah terbuka 1 *Peneliti berharap topik bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dapat terus dikembangkan dengan menggunakan graf lain selain graf yang telah digunakan pada penelitian ini.*

References

[1] Wilson, R. J. 2010. *Pengantar Teori Graf Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

[2] Dafik. 2015. Teori Graf, Aplikasi dan Tumbuhnya Keteramplan Berpikir Tingkat Tinggi. *Pidato Pengukuhan Guru Besar*. Jember: Pidato Ilmiah Pengukuhan Profesor di Lingkungan UNEJ. Mei.

[3] Zhang, P. 2016. *A Kaleidoscopic View of Graph Colorings*. USA: SpringerBriefs in Mathematics.

[4] Kristiana A I, Dafik, Utoyo M I, Slamin, Alfarisi R, Agustin I H, and M Venkatachalam. 2019. Local Irregularity Vertex Coloring of Graphs. *International Journal of Civil Engineering and Technology* **10(4)** 451-461.

[5] Kristiana A I, Dafik, Agustin I H, Utoyo M I, Alfarisi R, and Waluyo E. 2019.On the Chromatic Number Local Irregularity of Related Wheel Graph. *IOP Conf-Series:Journal of Physics Conf Series* 1211.0120003 1-10.

[6] Kristiana A I, Alfarisi R, Dafik, N Azahra. 2020.Local Irregular Vertex Coloring of Some Families of Graph. *Journal of Discreate Mathematical Sciences and Cryptography* 1-16 10.1080/09720529.2020.1754541.

[7] N Azahra, Kristiana A I, Dafik, and R Alfarisi. 2020. On the Local Irregularity Vertex Coloring of Related Grid Graph. *International Journal of Academic and Applied Research (IJAAR)* **4** 1-4.

[8] Kristiana, A. I., Dafik., R. Alfarisi, U. A. Anwar, dan S. M. Citra. 2020. An Inclusive Local Irregularity Coloring of Graphs. *Advances in Mathematics: Scientific Journal (AMSJ)*. 9(10): 8941–8946.